

Paweł Dykas

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Katedra Ekonomii Matematycznej

pawel.dykas@uj.edu.pl

NEOKLASYCZNY MODEL WZROSTU GOSPODARCZEGO Z CYKLICZNĄ LICZBĄ PRACUJĄCYCH¹

Streszczenie: Celem niniejszego opracowania jest próba rozszerzenia modelu wzrostu gospodarczego Solowa o uchylenie założenia o stałej stopie wzrostu liczby pracujących. W artykule przyjęto założenie, że liczba pracujących zmienia się cyklicznie w czasie, zmierzając w nieskończonym horyzoncie do stałej asymptoty. W części empirycznej dokonano kalibracji parametrów otrzymanego modelu teoretycznego. W pierwszej kolejności, opierając się na danych panelowych dla polskiej gospodarki, oszacowano elastyczność produkcji względem kapitału na poziomie 0,354. Następnie dokonano symulacji numerycznych skalibrowanych ścieżek wzrostu kapitału oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy. W analizach rozważano wpływ różnych stóp inwestycji, które zostały przyjęte na poziomie 15%, 20% i 25%. Analiz numerycznych dokonano dla polskiej gospodarki w 35-letnim horyzoncie czasowym.

Słowa kluczowe: cykliczna liczba pracujących, model wzrostu Solowa, ścieżka wzrostu produktu, ścieżka wzrostu kapitału.

Klasyfikacja JEL: E32, E37, O47, O49.

¹ Opracowanie powstało w ramach projektu NCN *Cykle wzrostu – dynamiczne modele koniunktury i wzrostu gospodarczego* nr OPUS8 UMO-2014/15/B/HS4/04264 kierowanego przez dra hab. Adama Krawca z Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego.

A NEOCLASSICAL GROWTH MODEL WITH A CYCLICAL NUMBER OF EMPLOYEES

Abstract: The aim of the present study is an attempt to extend the neoclassical model of economic growth of Solow by repealing the assumption of fixed employees ratio and introducing an employment function dependent cyclical on the time. In the empirical analysis the author conducted a calibration of parameters used by the research model. Based on panel data for Polish employees between 2002-2015 the parameter (α) (production flexibility in relation to capital) was estimated at 0.354. That value was adapted to a further numerical analysis. When conducting numerical analysis the impact of different investment rates (15%, 20% and 25%) and periods of cyclical fluctuations. A numerical analysis for the economy of Poland was made for a thirty five time series.

Keywords: cyclical number of employees, the Solow growth model, the path of product growth and the capital-labour ratio.

Wprowadzenie

Wzrost gospodarczy jest procesem, który powoduje powiększenie potencjału produkcyjnego, a liczba pracujących, obok inwestycji i postępu technicznego, stanowi kluczowy czynnik prowadzący do owego wzrostu. W literaturze przedmiotu można znaleźć podział modeli wzrostu gospodarczego na modele keynesowskie, neoklasyczne, modele realnego cyklu koniunkturalnego czy modele wzrostu endogenicznego (Tokarski, 2005, s. 7-24). Współczesne koncepcje wzrostu gospodarczego swoich podstaw upatrują przede wszystkim w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego (Malaga, 2009, s. 9-16). Model wzrostu gospodarczego Solowa był pierwszą rozwiniętą koncepcją zaliczaną do rodziny neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego (Solow, 1956). Model ten doczekał się wielu uogólnień, jednym z podejść do owego problemu było przyjęcie założenia, że w procesie produkcyjnym udział bierze więcej niż jeden rodzaj kapitału. Autorzy Mankiw i inni rozszerzyli model Solowa, rozważając dodatkowy zasób kapitału – kapitał ludzki (Mankiw, Romer i Weil, 1992, s. 407-437). Cztery lata później Nonneman i Vanhoudt dokonali uogólnienia modelu Solowa, polegało ono na przyjęciu założenia, że w procesie produkcyjnym bierze udział dowolna, skończona liczba zasobów kapitału (Nonneman i Vanhoudt, 1996, s. 943-953). Inne rozszerzenia można znaleźć w pracy Dykasa i Misiaka, w której autorzy rozważają neoklasyczny

model wzrostu gospodarczego z uwzględnieniem fluktuacji po stronie stopy inwestycji (Dykas i Misiak, 2016a, s. 197-204; 2016b, s. 2-13). W pracy Mroczek, Tokarskiego i Trojaka autorzy rozszerzyli model wzrostu Solowa, wprowadzając tzw. efekt grawitacyjny, który został oparty na prawach grawitacji Newtona. W opracowaniu autorzy przyjęli założenie, że regiony wzajemnie na siebie oddziałują, a siła owego oddziaływania jest proporcjonalna do iloczynu potencjałów gospodarczych regionów i odwrotnie proporcjonalna do fizycznej odległości między nimi (Mroczek, Tokarski i Trojak, 2014, s. 5-34).

W niniejszym artykule podjęto próbę uogólnienia modelu Solowa poprzez uchylenie założenia o stałej stopie wzrostu liczby pracujących. Dokonując analizy takich zagregowanych wielkości, jak PKB, inwestycje, zatrudnienie czy konsumpcja, można dostrzec, że ulegają one okresowym wahaniom. Szczególnie liczba pracujących jest wrażliwa na okresowe zmiany, co jest spowodowane zarówno czynnikami demograficznymi, jak i koniunkturalnymi. Z tego też względu przyjęto założenie, że liczba pracujących zmienia się w czasie w sposób cykliczny. Ponadto założono, że w nieskończonym horyzoncie czasu liczba pracujących będzie zmierzała do stałej asymptoty. W części empirycznej opracowania dokonano symulacji numerycznych, zakładając, iż liczba pracujących w polskiej gospodarce jest bardziej wrażliwa na zmiany po stronie koniunktury czy też sytuacji polityczno-gospodarczej niż demograficznej, co odzwierciedla się w przyjęciu względnie krótkich okresów wahań.

1. Model

W prezentowanym modelu wzrostu gospodarczego przyjęto następujące założenia:

1. Proces produkcyjny opisuje neoklasyczna funkcja produkcji typu Cobb-Douglasa (Cobb i Douglas, 1928, s. 139-165) dana wzorem (por. też Żółtowska, 1997, s. 3-17; Tokarski, 2011, s. 155-158)²:

$$Y(t) = (K(t))^{\alpha} (E(t))^{1-\alpha}, \quad (1)$$

² Wobec wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych zakłada się, że są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ oznaczał będzie dalej wartość zmiennej x w momencie t , zaś $\dot{x}(t) = dx/dt$ – pochodną zmiennej x po czasie t , czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie t .

gdzie $\alpha \in (0;1)$ to elastyczność produktu względem nakładów kapitału, Y zaś to strumień wytworzonego w gospodarce produktu, K , E to (odpowiednio) nakłady kapitału oraz jednostek efektywnej pracy będących iloczynem liczby pracujących i zasobu wiedzy naukowo-technicznej.

2. Przyrost zasobu kapitału w momencie t , podobnie jak to się dzieje w oryginalnym modelu Solowa, opisuje równanie różniczkowe postaci:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), \quad (2)$$

gdzie $\delta \in (0;1)$, $s \in (0;1)$ oznaczają (odpowiednio) stopę inwestycji oraz stopę deprecjacji kapitału.

3. Liczba pracujących $L(t)$ w momencie t opisana jest równaniem:

$$L(t) = \left(L_0 - \theta e^{-\gamma t} - e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (3)$$

Funkcja (3), dla $L_0 > \theta$ determinuje oscylacyjny trend wykładniczy zbieżny do asymptoty $(L_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (por rysunek 1). W równaniu (3) parametr $(L_0 - \theta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ oznacza liczbę pracujących w chwili $t = 0$, co wynika z następującej równości: $L(0) = (L_0 - \theta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, rozważając zaś granicę $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = (L_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, zauważy się, że parametr $(L_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ określa liczbę pracujących przy nieskończonym horyzoncie czasowym. Ponadto parametry ω i λ determinują (odpowiednio) długość okresu oraz amplitudę krzywej $L(t)$, a θ i γ determinują wykładniczy kształt krzywej $L(t)$.

4. Jednostki efektywnej pracy $E(t)$ rosną według stopy wzrostu równej $g + l(t)$, przy czym $g > 0$ jest stopą harrodiańskiego postępu technicznego, natomiast $l(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ jest stopą wzrostu liczby pracujących. Zatem, wykorzystując związek (3), stopa wzrostu jednostek efektywnej pracy spełnia równanie:

$$\dot{E}(t)/E(t) = g + \frac{\theta \gamma e^{-\gamma t} - \omega e^{-\lambda t} \cos(\omega t) + \lambda e^{-\lambda t} \sin(\omega t)}{(L_0 - \theta e^{-\gamma t} - e^{-\lambda t} \sin(\omega t))(1 - \alpha)}. \quad (4)$$

5. Definiując $y_E = Y/E$ oraz $k_E = K/E$ jako (odpowiednio) strumień wytworzonego produktu oraz zasób kapitału na jednostkę efektywnej pracy, można otrzymać wydajność pracy oraz techniczne uzbrojenie pracy jako:

$$y(t) = A_0 e^{g t} y_E(t), \quad (5)$$

$$k(t) = A_0 e^{g t} k_E(t). \quad (6)$$

Ponadto produkt oraz kapitał w momencie t opisują związki (7)-(8)

$$Y(t) = L_0 e^{n t} y(t), \quad (7)$$

$$K(t) = L_0 e^{n t} k(t). \quad (8)$$

Z funkcji produkcji (1) można dojść do funkcji produkcji w postaci intensywnej, dzieląc ją stronami przez jednostki efektywnej pracy $E > 0$, otrzymując:

$$y_E(t) = (k_E(t))^\alpha. \quad (9)$$

Relacja (9) opisuje zależność pomiędzy nakładami kapitału na jednostkę efektywnej pracy (k_E), a wielkością produktu na jednostkę owej pracy (y_E).

Różniczkując kapitał na jednostkę efektywnej pracy ($k_E = K/E$) po czasie t , mamy:

$$\dot{k}_E(t) = \frac{\dot{K}(t)E(t) - K(t)\dot{E}(t)}{(E(t))^2} = \frac{\dot{K}(t)}{E(t)} - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} k_E(t),$$

co wraz ze związkami (2)-(6) daje:

$$\dot{k}_E(t) = s y_E(t) - \mu(t) k_E(t), \quad (10)$$

przy czym $\mu(t) = \delta + g + l(t) > 0$ oznacza stopę ubytku kapitału na jednostkę efektywnej pracy. Równanie (13) w omawianym tu modelu jest odpowiednikiem równania ruchu w oryginalnym modelu Solowa.

Przy uwzględnieniu funkcji produkcji w postaci intensywnej (9) oraz zależności (10) przyrost kapitału na jednostkę efektywnej pracy spełnia zależność:

$$\dot{k}_E(t) = s(k_E(t))^\alpha - \mu(t)k_E(t). \quad (11)$$

Równanie (11) dla każdego nieujemnego t posiada trywialne rozwiązanie ($k_E(t) = 0$) oraz pewną rodzinę całek nietrywialnych³.

Równanie (11) dla $k_E > 0$ można również zapisać jako:

$$(k_E(t))^{-\alpha} \dot{k}_E(t) = s - \mu(t)(k_E(t))^{1-\alpha}. \quad (12)$$

Dokonując następującego podstawienia:

$$q(t) = (k_E(t))^{1-\alpha}, \quad (13)$$

związek (12) można sprowadzić do równania niejednorodnego danego wzorem:

$$\frac{\dot{q}(t)}{1-\alpha} = s - \mu(t)q(t),$$

które można przekształcić do zależności:

$$\dot{q}(t) = (1-\alpha)s - (1-\alpha)\mu(t)q(t). \quad (14)$$

Rozważając równanie jednorodne ze związku (14), otrzymujemy:

$$\dot{q}(t) = -(1-\alpha)\mu(t)q(t), \quad (15)$$

rozwiązanie równania (15) dane jest wzorem:

$$q(t) = A(t)e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1}, \quad (16)$$

przy czym czynnik $A(t)$ to uzmienniona stała całkowania. Różniczkując równanie (16) względem czasu oraz uwzględniając zależność (14), otrzymujemy:

³ Całka trywialna (jako nieciekawa zarówno z matematycznego, jak i ekonomicznego punktu widzenia) będzie dalej pomijana. Nietrywialna zaś całka owego równania będzie wyznaczała ścieżkę czasową (lub ścieżkę wzrostu) kapitału na jednostkę efektywnej pracy.

$$\begin{aligned}
& (1-\alpha)s - (1-\alpha)\left(\delta + g + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right) A(t) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} = \\
& = \dot{A}(t) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} + A(t)(\alpha-1)(\delta+g) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} + \\
& + A(t) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (\alpha-1)(L(t))^{\alpha-2} \dot{L}(t).
\end{aligned}$$

Stąd oraz ze związków (3)-(4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
A(t) = s(1-\alpha) & \left[\frac{L_0}{(1-\alpha)(\delta+g)} e^{(1-\alpha)(\delta+g)t} - \right. \\
& \left. + \frac{\theta}{(1-\alpha)(\delta+g)-\gamma} e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\gamma]t} - \right. \\
& \left. + \frac{[(1-\alpha)(\delta+g)-\lambda]^2 e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\lambda]t}}{[(1-\alpha)(\delta+g)-\lambda]^2 + \omega^2} \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{(1-\alpha)(\delta+g)-\lambda} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{[(1-\alpha)(\delta+g)-\lambda]^2} \cos(\omega t) \right) + C \right],
\end{aligned}$$

gdzie $C > 0$.

Zatem z powyższego równania oraz podstawienia (13) kapitał na jednostkę efektywnej pracy można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
k_E(t) = & \left[\frac{s(1-\alpha)L_0}{(1-\alpha)(g+\delta)} - \frac{s\theta(1-\alpha)e^{-\gamma t}}{(1-\alpha)(g+\delta)-\gamma} - \right. \\
& \left. + (1-\alpha)s \frac{(1-\alpha)(g+\delta)-\lambda}{\omega^2 + ((1-\alpha)(g+\delta)-\lambda)^2} \right. \\
& \left. \left(e^{-\lambda t} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{(1-\alpha)(g+\delta)-\lambda} e^{-\lambda t} \cos(\omega t) \right) + \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
& + C e^{-(1-\alpha)(g+\delta)t}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{1}{L_0 - \theta e^{-\gamma t} - e^{-\lambda t} \sin(\omega t)}.$$

Zakładając, że dla omawianego problemu warunek brzegowy Cauchy'ego przyjmuje postać: $k_E(0) = k_{E0} \geq 0$, stałą $C > 0$ możemy zapisać jako:

$$C = \frac{(k_{E0})^{1-\alpha} (N_0 + \eta_2)(\tau_0 - \eta_1)}{(1-\alpha)s} + \frac{N_0\eta_1}{(1-\alpha)(\delta + g) - \theta_1} -$$

$$+ \frac{N_0\tau_0}{(1-\alpha)(\delta + g)} -$$

$$+ \frac{\tau_0\eta_2}{(1-\alpha)(\delta + g) - \theta_2} + \frac{\eta_1\eta_2}{(1-\alpha)(\delta + g) - \theta_1 - \theta_2}.$$

Wynika stąd, że kapitał na jednostkę efektywnej pracy $(k_E(t))$ w omawianym tu modelu wzrostu gospodarczego będzie się kształtował następująco:

$$k_E(t) = \left[\frac{s(1-\alpha)L_0}{(1-\alpha)(g+\delta)} - \frac{s\theta(1-\alpha)e^{-\gamma t}}{(1-\alpha)(g+\delta) - \gamma} - \right.$$

$$\left. + (1-\alpha)s \frac{(1-\alpha)(g+\delta) - \lambda}{\omega^2 + ((1-\alpha)(g+\delta) - \lambda)^2} \right]$$

$$\left(e^{-\lambda t} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{(1-\alpha)(g+\delta) - \lambda} e^{-\lambda t} \cos(\omega t) \right) +$$

$$+ \left((k_{E0}(L_0 - \theta))^{1-\alpha} - \frac{s(1-\alpha)L_0}{(1-\alpha)(g+\delta)} \right) e^{-(1-\alpha)(g+\delta)t} + \quad (21)$$

$$+ \left(\frac{s\theta(1-\alpha)}{(1-\alpha)(g+\delta) - \gamma} - \frac{s(1-\alpha)\omega}{\omega^2 + ((1-\alpha)(g+\delta) - \lambda)^2} \right) e^{-(1-\alpha)(g+\delta)t} \Bigg]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{1}{L_0 - \theta e^{-\gamma t} - e^{-\lambda t} \sin(\omega t)}.$$

Ponadto, wykorzystując związek (9), produkt na jednostkę efektywnej pracy ($y_E(t)$) można opisać równaniem:

$$\begin{aligned}
 y_E(t) = & \left[\frac{s(1-\alpha)L_0}{(1-\alpha)(g+\delta)} - \frac{s\theta(1-\alpha)e^{-\gamma t}}{(1-\alpha)(g+\delta)-\gamma} \right. \\
 & \left. + (1-\alpha)s \frac{(1-\alpha)(g+\delta)-\lambda}{\omega^2 + ((1-\alpha)(g+\delta)-\lambda)^2} \right. \\
 & \left(e^{-\lambda t} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{(1-\alpha)(g+\delta)-\lambda} e^{-\lambda t} \cos(\omega t) \right) + \\
 & + \left((k_{E0}(L_0 - \theta))^{1-\alpha} - \frac{s(1-\alpha)L_0}{(1-\alpha)(g+\delta)} \right) e^{-(1-\alpha)(g+\delta)t} + \\
 & + \left(\frac{s\theta(1-\alpha)}{(1-\alpha)(g+\delta)-\gamma} - \frac{s(1-\alpha)\omega}{\omega^2 + ((1-\alpha)(g+\delta)-\lambda)^2} \right) e^{-(1-\alpha)(g+\delta)t} \Bigg]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
 & \frac{1}{(L_0 - \theta e^{-\gamma t} - e^{-\lambda t} \sin(\omega t))^\alpha}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

2. Kalibracja parametrów modelu i symulacje numeryczne

Symulacje numeryczne modelu teoretycznego, przedstawionego w punkcie 2 prowadzone były w dwóch etapach. W pierwszym etapie dokonano kalibracji wartości parametrów funkcji opisującej, kształtowanie się liczby pracujących $L(t)$ oraz ścieżki wzrostu kapitału na jednostkę efektywnej pracy ($k_E(t)$) i produktu na jednostkę efektywnej pracy ($y_E(t)$). Na tym etapie dokonano również estymacji elastyczności produktu względem kapitału (α), opierając się na danych panelowych dla polskiej gospodarki za lata 2002-2015. Natomiast w drugim etapie dokonano symulacji numerycznych analizowanego modelu.

Parametry funkcji opisującej zmianę liczby pracujących skalibrowano na podstawie następujących koniunkcji:

$$(L_0 + \theta)^{\frac{1}{1-\alpha}} = L_{2015} \wedge (L_0)^{\frac{1}{1-\alpha}} = L_{2050},$$

gdzie:

L_{2015} oraz L_{2050} to (odpowiednio) liczba pracujących w 2015 oraz 2050 r.

Ponadto w każdym z rozważanych wariantów przyjęto trzy scenariusze dotyczące kształtowania się stóp inwestycji (na poziomie 15, 20 i 25%), a w wyniku oszacowań elastyczności produktu względem kapitału otrzymano wartość parametru α na poziomie 0,354. Przyjęto również stopę postępu technicznego na poziomie 2% oraz stopę deprecjacji kapitału na poziomie 5%⁴.

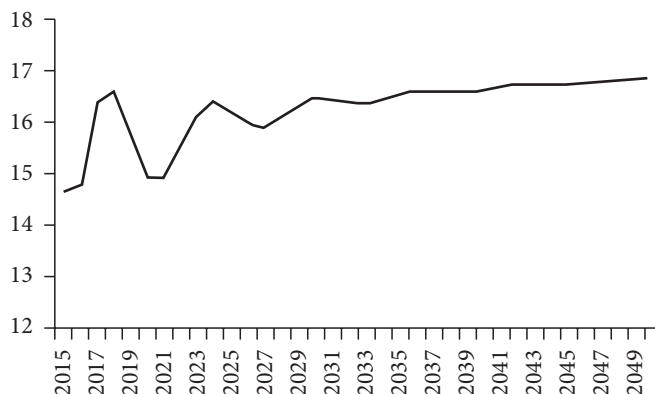
W drugim etapie dokonano symulacji numerycznych analizowanego modelu. W symulacjach przyjęto następujący wariant kształtowania się liczby pracujących w 2050 r. W opracowaniu przyjęto, zgodnie z prognozą Głównego Urzędu Statystycznego dotyczącą kształtowania się wielkości populacji w Polsce do 2050 r., że liczba ludności zmaleje z poziomu 38,47 mln osób (w 2015 r.), do poziomu 33,95 mln osób (w 2050 r.). Ponadto przyjęto również założenie, że wartość wskaźnika aktywności ekonomicznej wzrośnie z poziomu 0,38, który odnotowano w gospodarce polskiej w 2015 r., do poziomu 0,5 w 2050 r.⁵ Przyjęcie wskaźnika aktywności ekonomicznej na poziomie 0,5 w 2050 r. wynika z założenia, że polska gospodarka w 2050 r. osiągnie średni poziom aktywności ekonomicznej, który charakteryzował gospodarki o najwyższym poziomie tego wskaźnika wśród gospodarek UE w 2016 r., czyli gospodarki: brytyjskiej, holenderskiej, niemieckiej oraz szwedzkiej.

Zatem w analizowanym wariancie przyjęto, że liczba pracujących w polskiej gospodarce wzrośnie do poziomu 16,98 mln osób w 2050 r., co przedstawiono na rysunku 1.

Trajektorie $L(t)$ (por. rysunek 1) odzwierciedlają kształtowanie się liczby pracujących. W niniejszym opracowaniu przyjęto, że cykle dotyczące liczby pracujących wynoszą 6 lat, co wynika z faktu, że w ostatnich latach liczba pracujących jest bardziej wrażliwa na zmiany o charakterze koniunkturalnym czy politycznym niż na zmiany o charakterze czysto demograficznym.

⁴ Podobne wartości kalibrowanych parametrów dla polskiej gospodarki można znaleźć m.in. w pracy (Filipowicz, Syrek i Tokarski, 2017).

⁵ Wskaźnik aktywności ekonomicznej w roku t rozumiany będzie dalej jako stosunek liczby pracujących w gospodarce w roku t do liczby ludności w tymże roku.



Rysunek 1. Prognoza liczby pracujących w Polsce (w latach 2015-2050, w mln osób)

Źródło: Na podstawie prognoz GUS (www.stat.gov.pl).

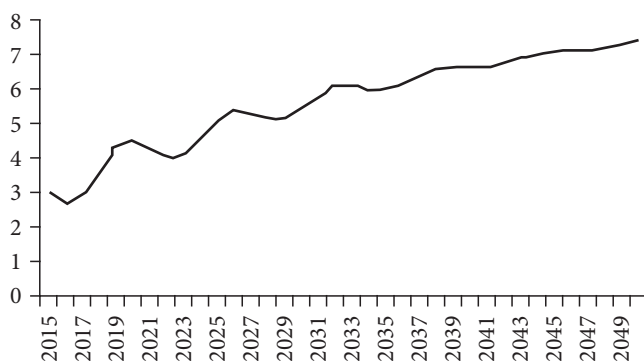
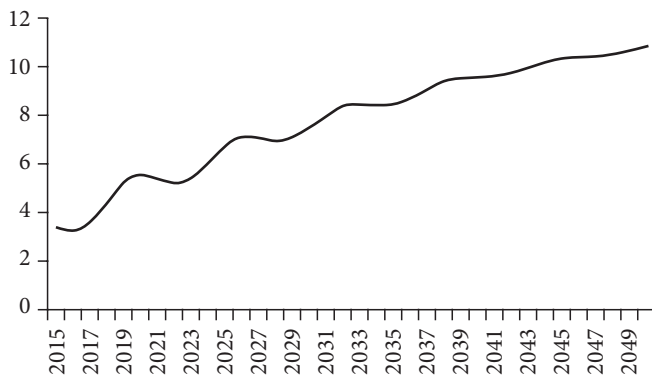
Analizując trajektorie liczby pracujących w polskiej gospodarce w rozważanym horyzoncie czasu (rysunek 1), warto zauważyć, że mimo spadku wielkości populacji (z poziomu 38,47 do 33,95 mln os.) liczba pracujących wzrasta i osiąga poziom około 16,98 mln osób. Owe wzrosty pracujących wynikają przede wszystkim z założeń rosnącego wskaźnika aktywności ekonomicznej z poziomu 0,38 w 2015 r. do 0,5 w 2050 r. Okazuje się, że pomimo pesymistycznych prognoz GUS dotyczących spadku populacji wcale nie musi się to negatywnie przekładać na liczbę pracujących. Liczba pracujących zależy bowiem nie tylko od sytuacji demograficznej, lecz także od efektu malejącego bezrobocia, wydłużania wieku aktywności zawodowej czy też większej aktywności zawodowej wśród kobiet. Powyższe czynniki oraz stosunkowo niski udział pracujących do populacji w Polsce w porównaniu z innymi gospodarkami europejskimi istotnie wpływają na przyjęcie wariantu z rosnącym poziomem wskaźnika aktywności ekonomicznej.

Symulacje numeryczne przeprowadzono w 35-letnim horyzoncie czasu (2015-2050), a ich wyniki zestawiono w tabelach 1-2 oraz na wykresach 2-7.

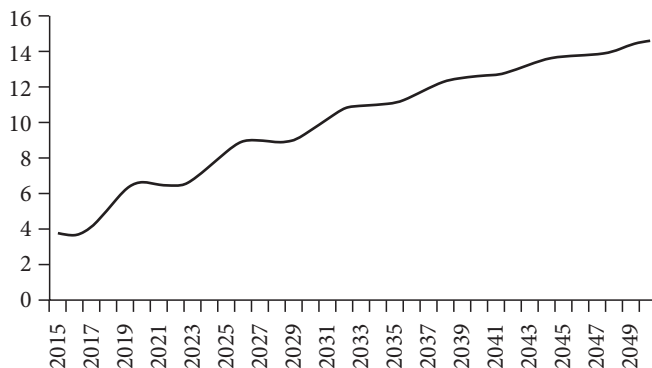
Dokonując analizy wyników symulacji numerycznych zestawionych w tabeli 1 oraz na rysunkach 2-4, można wyciągnąć następujące wnioski: po pierwsze, im wyższa stopa inwestycji, tym wyżej są położone czasowe ścieżki wzrostu kapitału na jednostkę efektywnej pracy $k_E(t)$.

Tabela 1. Wyniki symulacji numerycznych $k_E(t)$

$k_E(t)$			
Stopa inwestycji	min	max	max/min
$s = 0,15$	2,72	7,42	2,72
$s = 0,20$	3,12	10,86	3,48
$s = 0,25$	3,52	14,67	4,17

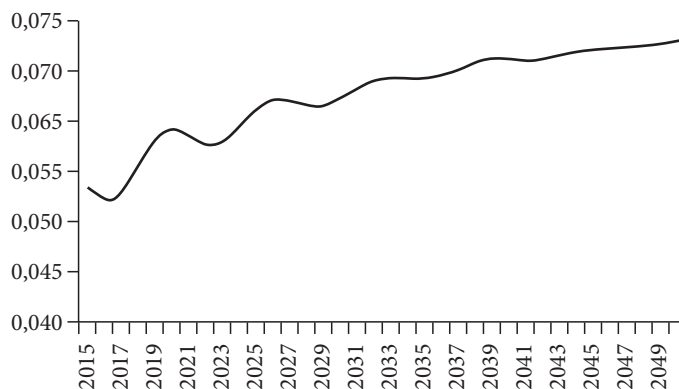
Rysunek 2. Ścieżka wzrostu kapitału $k_E(t)$ przy stopie inwestycji równej 15%Rysunek 3. Ścieżka wzrostu kapitału $k_E(t)$ przy stopie inwestycji równej 20%

Po drugie, im wyższa stopa inwestycji, tym kapitał na jednostkę efektywnej pracy odnotowuje wyższy wzrost. W analizowanym okresie kapitał na jednostkę efektywnej pracy wzrasta odpowiednio o około 3,27 razy ($s = 0,15$), około 3,54 razy ($s = 0,20$) oraz 4,2 razy ($s = 0,25$).



Rysunek 4. Ścieżka wzrostu kapitału $k_E(t)$ przy stopie inwestycji równej 25%

Natomiast w przypadku ścieżek wzrostu $y_E(t)$ produkt na jednostkę efektywnej pracy w omawianym okresie wzrośnie około 1,35 razy dla $s = 0,15$, około 1,45 razy dla $s = 0,20$ oraz około 1,53 razy przy $s = 0,25$ w porównaniu do wartości początkowych. Podobnie jak w przypadku kapitału na jednostkę efektywnej pracy ścieżka wzrostu produktu jest tym wyżej położona, im wyższa jest stopa inwestycji (por. rysunki 4-7).

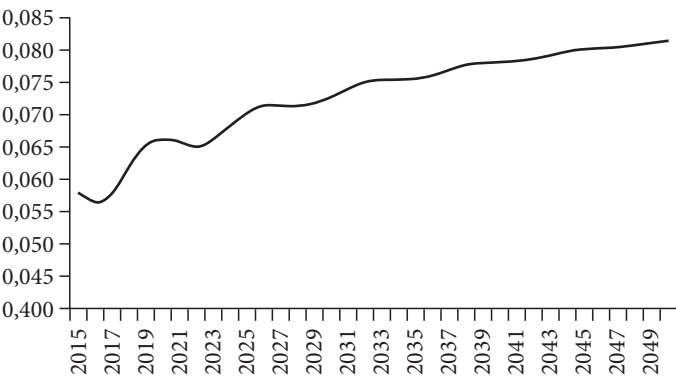


Rysunek 5. Trajektorie produktu $y_E(t)$ dla $s = 0,15$

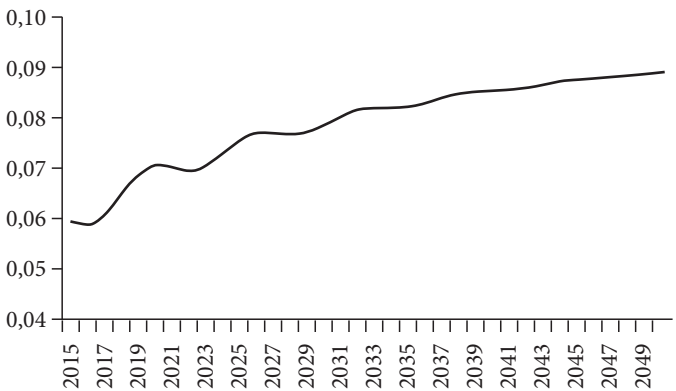
Ponadto z tabel 1-2 wynika, że kapitał na jednostkę efektywnej pracy rośnie szybciej niż produkt na jednostkę efektywnej pracy. Powoduje to, iż produktywność kapitału, definiowana jako stosunek produktu do kapitału charakteryzuje się tendencją malejącą.

Tabela 2. Wyniki symulacji numerycznych $y_E(t)$

$y_E(t)$			
Stopa inwestycji	min	max	max/min
$s = 0,15$	0,054	0,076	1,35
$s = 0,20$	0,560	0,810	1,45
$s = 0,25$	0,058	0,890	1,53



Rysunek 6. Trajektorie produktu $y_E(t)$ dla $s = 0,20$



Rysunek 7. Trajektorie produktu $y_E(t)$ dla $s = 0,25$

Podsumowanie

Przeprowadzone w opracowaniu rozważania można podsumować następująco:

1. Przedstawiony w artykule model wzrostu gospodarczego stanowi pewne rozszerzenie neoklasycznego modelu Solowa. W rozważanym modelu uchylono założenie o stałej stopie wzrostu pracujących, przyjęto zaś założenie, że liczba pracujących zmienia się w czasie w sposób cykliczny do stałej asymptoty w nieskończonym horyzoncie czasowym.

2. Uchylenie założenia o stałych stopach wzrostu liczby pracujących pozwala rozważać w omawianym modelu pewne scenariusze wynikające zarówno z czynników demograficznych, jak i z innych procesów zachodzących na rynku pracy.

3. Z przeprowadzonych w części empirycznej symulacji numerycznych analizowanego modelu wynika, że prognozy dotyczące kształtowania się wielkości populacji w Polsce do 2050 r. (spadek populacji do poziomu 33,95 mln osób) wcale nie muszą negatywnie wpływać ani na liczbę pracujących, ani na wzrost gospodarczy. Okazuje się, iż do 2050 r. możliwy jest wzrost liczby pracujących, przy założeniu, że wzrośnie współczynnik aktywności ekonomicznej.

4. Przeprowadzone symulacje numeryczne pozwalają zauważyć, że możliwa jest sytuacja, w której produkt wzrośnie o około 1,3-1,5 razy mimo spadku populacji. Jednak wzrost ten jest możliwy pod warunkiem wzrostu współczynnika aktywności ekonomicznej z poziomu 0,38 w 2000 r. do 0,5 w 2050.

Bibliografia

- Cobb, C. W. i Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *American Economic Review*, 18, 139-165.
- Dykas, P. i Misiak, T. (2016a). Cykliczność inwestycji w modelu wzrostu gospodarczego – ujęcie teoretyczne oraz symulacje numeryczne, *Studia Prawno-Ekonomiczne*, 100, 197-209.
- Dykas, P. i Misiak, T. (2016b). Neoklasyczny model wzrostu gospodarczego z sinusoidalnymi inwestycjami. *Przegląd Statystyczny*, 63(1), 49-65.
- Filipowicz, K., Syrek, R. i Tokarski, T. (2017). Ścieżki wzrostu modelu Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących. *Przegląd Statystyczny*, 64(1), 21-40.

- Malaga, K. (2009). *O niektórych dylematach teorii wzrostu gospodarczego i ekonomii*. Warszawa: ZKT TE.
- Mankiw, N. G., Romer, D. i Weil, N.D. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437.
- Mroczek, K., Trojak, M. i Tokarski, T. (2014). Grawitacyjny model zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw. *Gospodarka Narodowa*, 3, 5-34.
- Nonneman, W. i Vanhoudt, P. (1996). A further augmentation of the Solow model and the empirics of economics growth for the OECD countries. *Quarterly Journal of Economics*, 111(3), 943-953.
- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94.
- Tokarski, T. (2005). *Statystyczna analiza regionalnego zróżnicowania wydajności pracy, zatrudnienia i bezrobocia w Polsce*. Warszawa: Wydawnictwo PTE.
- Tokarski, T. (2011). *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*. Warszawa: PWE.
- Żółtowska, E. (1997). *Funkcja produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.